🔢

APPUNTI MATEMATICA (PIETRO VACCARI)

FUNZIONI REALI A 2 VARIABILI

Le funzioni reali a 2 variabili sono funzioni che dipendono da due variabili indipendenti, di solito rappresentate come x e y. Matematicamente, una funzione f(x,y) può essere definita come una regola che associa ad ogni coppia di numeri reali (x,y) un unico numero reale z:

$$f : RxR- > Rf(x,y)- > z$$

Dove R indica l'insieme dei numeri reali.

Un esempio di funzione reale a 2 variabili potrebbe essere:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Questa funzione restituisce la somma dei quadrati di x e y per ogni coppia di valori (x,y). Ad esempio, se scegliamo x=2 e y=3, la funzione restituirà:

$$f(2,3) = 2^2 + 3^2 = 13$$

In generale, le funzioni reali a 2 variabili possono essere visualizzate come superfici tridimensionali nello spazio, dove l'altezza della superficie rappresenta il valore della funzione per ogni coppia di valori (x,y).

Le funzioni reali a due variabili sono funzioni matematiche che associano a ogni coppia di numeri reali (x,y) un numero reale f(x,y). Queste funzioni possono essere rappresentate graficamente come superfici in uno spazio tridimensionale.

Matematicamente, una funzione reale a due variabili f(x,y) può essere definita come:

$f: R^2 \to R$

dove R^2 è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x,y) e R è l'insieme dei numeri reali.

La funzione può essere definita in diversi modi, ad esempio attraverso una formula esplicita, come:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Questa funzione assegna ad ogni coppia di numeri reali (x,y) il valore della loro somma dei quadrati.

Le funzioni reali a due variabili possono essere analizzate come quelle a una sola variabile, con l'aggiunta di alcune proprietà e strumenti matematici specifici. Ad esempio, si può studiare la continuità, la differenziabilità, l'integrazione, le curve di livello e la derivata parziale.

Le curve di livello sono insiemi di punti (x,y) tali che f(x,y) assume un dato valore costante k. Queste curve sono utili per visualizzare le caratteristiche della superficie della funzione.

La derivata parziale di f rispetto a x è definita come:

$\partial f/\partial x = \lim_{h \to 0} [f(x+h, y) - f(x,y)]/h$

Questo rappresenta la variazione di f quando la variabile x viene variata, a parità di y. In modo analogo, si può definire la derivata parziale rispetto a y.

Le funzioni reali a due variabili sono molto utili in diversi campi della matematica, delle scienze e dell'ingegneria, ad esempio nella modellizzazione di fenomeni fisici e biologici, nella statistica multivariata e nella crittografia.

Esercizio

Studiare i termini della funzione $F(x;y)=4x^3+12x+6y^2$

- Il termine $4x^3$ indica che la funzione contiene un termine cubico rispetto a x.
- Il termine $12x$ indica un termine lineare rispetto a x.
- Il termine $6y^2$ indica un termine quadratico rispetto a y.

Questi termini indicano la forma della funzione e il tipo di relazione tra le variabili x e y.

Estremi della funzione:
Gli estremi della funzione F(x;y) possono essere determinati calcolando le derivate parziali rispetto a x e y e risolvendo le equazioni risultanti per trovare i punti critici.

- Derivata parziale rispetto a x:
  ∂F/∂x = 12x^2 + 12
- Derivata parziale rispetto a y:
  ∂F/∂y = 12y

Per trovare i punti critici, impostiamo entrambe le derivate parziali a zero e risolviamo le equazioni:

12x^2 + 12 = 0
12y = 0

Dalla prima equazione, otteniamo:
12x^2 = -12
x^2 = -1
Non esistono soluzioni reali per x, quindi non ci sono punti critici rispetto a x.

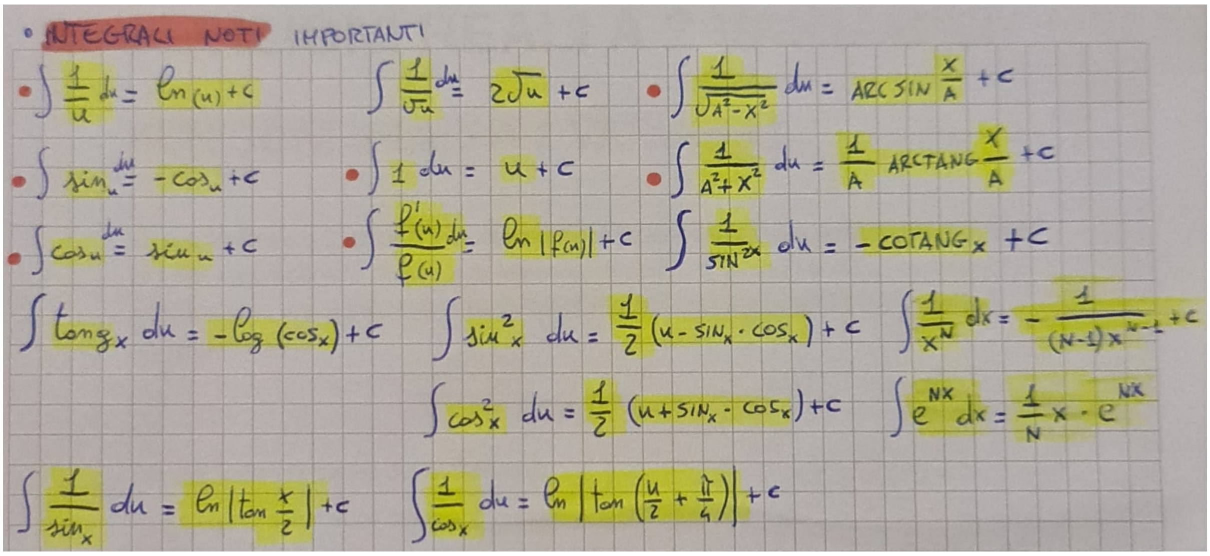
Dalla seconda equazione, otteniamo:
12y = 0
y = 0
Quindi, il punto critico è (0, 0).

In conclusione, la funzione F(x;y) = 4x^3 + 12x + 6y^2 ha termini polinomiali di terzo grado in x, lineare in x e quadratico in y. Il suo unico punto critico è (0, 0).

INTEGRALI

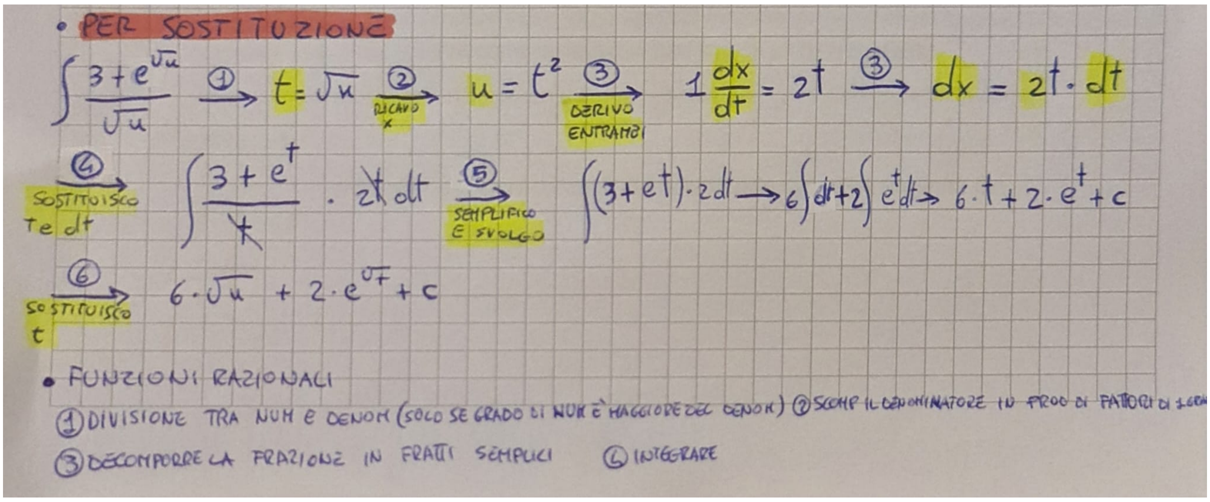
In matematica, l'integrale è una generalizzazione della somma, che permette di calcolare l'area sotto una curva (o il volume di uno spazio tra una superficie e un piano). L'integrale di una funzione è un concetto fondamentale dell'analisi matematica, e viene utilizzato in molti campi della scienza e dell'ingegneria.

Ecco alcuni integrali noti importanti:



Ecco un elenco delle formule di integrazione più comuni:

1. Integrazione per parti: $\int u dv = uv - \int v du$
2. Sostituzione: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, dove $u = g(x)$
3. Integrazione di funzioni razionali: $\int (P(x)/Q(x))dx$, dove P(x) e Q(x) sono polinomi



Ci sono diverse tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, tra cui:

1. Sostituzione: Questa tecnica consiste nel sostituire una parte dell'integrale con una nuova variabile, in modo da semplificare l'integrale e renderlo più facile da risolvere.
2. Per parti: Questa tecnica si basa sulla formula di integrazione per parti e viene utilizzata per integrare il prodotto di due funzioni.

3. Espansione in serie di potenze: Questa tecnica consiste nell'espandere la funzione da integrare in una serie di potenze e integrare ogni termine della serie separatamente.
4. Metodo di sostituzione trigonometrica: Questo metodo si basa sulla sostituzione di funzioni trigonometriche complesse con funzioni trigonometriche più semplici.
5. Metodo di frazioni parziali: Questo metodo viene utilizzato per integrare una funzione razionale, ossia un rapporto di due polinomi.
6. Metodo di integrazione numerica: Questo metodo consiste nell'approximare l'integrale con una somma di valori numerici discreti, ad esempio utilizzando il metodo dei trapezi o il metodo di Simpson.

Queste sono solo alcune delle tecniche che possono essere utilizzate per risolvere un integrale, e la scelta della tecnica dipende dalla complessità della funzione da integrare e dal livello di precisione richiesto nella soluzione dell'integrale.

1. Sostituzione:

   La tecnica di sostituzione è una delle tecniche più comuni per risolvere gli integrali. Questa tecnica richiede di scegliere una funzione da sostituire all'interno dell'integrando. Successivamente, si calcola la sua derivata e si effettua la sostituzione nell'integrando, in modo che l'integrando sia espresso interamente in funzione della funzione sostituita. A questo punto, si risolve l'integrale in termini di questa nuova funzione.

   Esempio 1:

$$\int xcos(x2)dx$$

In questo caso, scegliamo di sostituire $T = x^2$, in modo che $dT/dx = 2x$ e quindi $dx = du/2x.$

Eseguendo la sostituzione nell'integrando, abbiamo:

$$\int xcos(x^2)dx = 1/2 \int cos(u)du$$

A questo punto, possiamo risolvere facilmente l'integrale:

$$1/2 \int cos(u)du = 1/2sin(u) + C = 1/2sin(x^2) + C$$

Dove C è la costante di integrazione. Quindi, la soluzione finale per l'integrale originale è:

$$\int xcos(x^2)dx = 1/2sin(x^2) + C$$

Questa è solo un'esempio di come la tecnica di sostituzione può essere utilizzata per risolvere un integrale. Ci sono molte altre tecniche che possono essere utilizzate a seconda del tipo di integrale che si sta affrontando.

Esempio 2:

$\int (2x+1)^4 dx$

1. Identificare la parte dell'integranda da sostituire: $(2x+1)$
2. Sostituire la parte dell'integranda identificata con una nuova variabile t: $t = 2x + 1$
3. Calcolare la derivata della nuova variabile rispetto a x: $dt/dx = 2$
4. Riscrivere l'integranda in termini di t e x:

   $(2x+1)^4 dx = (t)^4 (dt/2)$
5. Risolvere l'integrale:

$$\int (2x+1)^4 dx = \int t^4 (dt/2) = (1/10)t^5 + C$$

6. Sostituire t con 2x + 1:

   $(1/10)(2x+1)^5 + C$
7. Semplificare l'espressione, se possibile.

2. Per parti:

   La tecnica di integrazione per parti viene utilizzata quando l'integranda è un prodotto di due funzioni, ciascuna delle quali non è facilmente integrabile. Si basa sulla formula di integrazione per parti:

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx$$

dove u(x) e v(x) sono funzioni derivabili.

Ecco un esempio di come risolvere un integrale per parti:

$$\int x \cdot sin(x) dx$$

In questo caso, la funzione $u(x)$ sarà $u(x) = x$ e la funzione $v'(x)$ sarà $v'(x) = sin(x)$. Quindi, derivando la funzione $u(x)$, otteniamo $u'(x) = 1$ e integrando la funzione $v'(x)$, otteniamo $v(x) = -cos(x)$.

Applicando la formula di integrazione per parti, abbiamo:

$$\int x \cdot sin(x) dx = -x \cdot cos(x) + \int cos(x) dx$$

Integrando l'ultimo termine, otteniamo:

$$\int x \cdot sin(x) dx = -x \cdot cos(x) + sin(x) + C$$

dove C rappresenta la costante di integrazione.

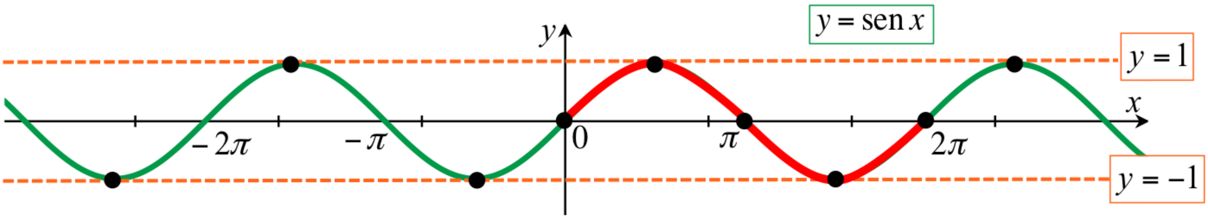
Quindi, l'integrale di $x \cdot sin(x)$ è dato da $-x \cdot cos(x) + sin(x) + C$.

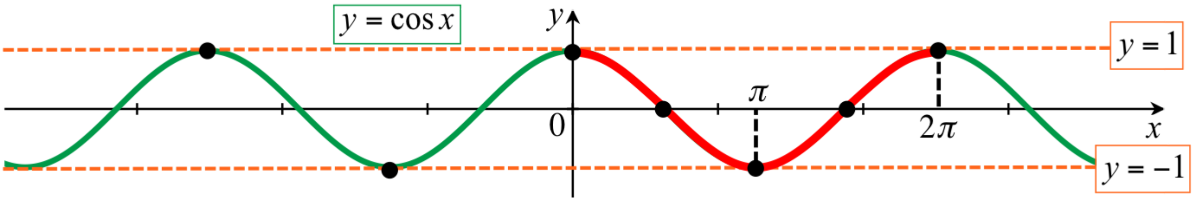
Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\tan(x)\sec(x)$
$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sec(x)}$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{\csc(x)}$	$\cos(x)$
$\frac{1}{\cot(x)}$	$\sec^2(x)$
$\sin^n(x)$	$n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$\cos^n(x)$	$-n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$
$\tan^n(x)$	$n\sec^2(x)\tan^{n-1}(x)$
$e^{\sin(x)}$	$e^{\sin(x)}\cos(x)$
$e^{\cos(x)}$	$\sin(x)(-e^{\cos(x)})$
$e^{\tan(x)}$	$e^{\tan(x)}\sec^2(x)$
$\log(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\log(\cos(x))$	$-\tan(x)$
$\log(\tan(x))$	$\csc(x)\sec(x)$
$\sin^x(x)$	$\sin^x(x)(x\cot(x)+\log(\sin(x)))$
$\cos^x(x)$	$\cos^x(x)(\log(\cos(x))-x\tan(x))$
$\cos^{\tan(x)}(x)$	$\cos^{\tan(x)}(x)(\sec^2(x)\log(\cos(x))-\tan^2(x))$

Tabella degli integrali

$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*	$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*
$\int x\,dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\begin{cases}\pm\arcsin x + c \\ \mp\arccos x + c\end{cases}$
$\int a\,dx$	$ax + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$\log\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\| + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{1}{a^x}dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int \frac{x}{x^2+1}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\|x^2+1\right\| + c$	$\int \frac{1}{x^n}dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a\cdot x^n\,dx$	$\frac{a\cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{a+x^2}dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int \frac{1}{x}dx$	$\log\|x\|+c$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx$	$\frac{1}{2}\log\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$	$\begin{cases} arcSh\,x + c \\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c\end{cases}$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + c$
$\int \tan x\,dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int \frac{1}{\tan x}dx$	$\log(\sin x) + c$
$\int \arcsin x\,dx$	$\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx$	$\log\left\|x+\sqrt{x\pm a^2}\right\| + c$
$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2} + c$	$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\log\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\| + c$
$\int e^{\pm k x}dx$	$\pm\frac{e^{\pm k x}}{k} + c$	$\int \frac{1}{e^{kx}}dx$	$-\frac{e^{-k x}}{k} + c$
$\int\left(1+\tan^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\log\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + c$
$\int\left(1+ctg^2 x\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctg x + c$	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\log\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| + c$
$\int Sh\,x\,dx$	$Ch\,x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int Ch\,x\,dx$	$Sh\,x+c$	$\int \frac{1}{Ch^2 x}dx = \int\left(1-Th^2 x\right)dx + c$	$Th\,x + c$
$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Seno e coseno:





EQ. DIFFERENZIALE

Le equazioni differenziali sono equazioni che contengono funzioni incognite e loro derivate, dove la soluzione cercata è una funzione che soddisfa l'equazione e le sue condizioni iniziali o di frontiera.

In generale, le equazioni differenziali sono classificate in base all'ordine, ovvero al grado della derivata più alta presente nell'equazione. Ad esempio, un'equazione differenziale del primo ordine ha la forma:

$$f(x, y, y') = 0$$

dove y è la funzione incognita, y' è la sua derivata rispetto a x, e f è una funzione che dipende da x, y e y'. La soluzione di questa equazione è una funzione y(x) che soddisfa l'equazione.

Un'equazione differenziale del secondo ordine ha la forma:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

dove y'' è la seconda derivata di y rispetto a x. La soluzione di questa equazione è una funzione y(x) che soddisfa l'equazione.

Esistono diverse tecniche per risolvere le equazioni differenziali, tra cui le soluzioni esatte, le soluzioni approssimate e i metodi numerici. Alcune tecniche comuni per le equazioni differenziali del primo ordine includono la separazione delle variabili, la sostituzione, l'integrazione per parti e i fattori integranti. Per le equazioni differenziali del secondo ordine, le tecniche comuni includono la sostituzione, il metodo dei coefficienti indeterminati, il metodo delle variazioni delle costanti e il metodo di eliminazione di Gauss.

Esempio di equazione differenziale del primo ordine:

$$dy/dx + 2y = 3x$$

Soluzione utilizzando la sostituzione:

1. Si sceglie una funzione ausiliaria u(x) che semplifichi l'equazione, ad esempio $u(x) = e^(2x)$.
2. Si calcola la derivata di u(x), ovvero u'(x) = 2e^(2x).
3. Si sostituisce y = uv, dove v(x) è una funzione incognita.
4. Si calcolano le derivate di y(x), ovvero $y' = u'v + uv'$ e $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$.
5. Si sostituiscono y, y' e y'' nell'equazione originale e si semplifica.
6. Si risolve l'equazione semplificata per v(x).
7. Si moltiplica v(x) per u(x) per trovare la soluzione y(x).

PROBLEMA DI CHUCHY

Il problema di Cauchy è un tipo di problema di valore iniziale per un'equazione differenziale ordinaria, dove è necessario trovare una soluzione che soddisfi una condizione iniziale specificata.

La procedura generale per risolvere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria consiste nei seguenti passaggi:

1. Scrivere l'equazione differenziale nella forma standard, che può essere una delle seguenti:
   - Forma standard del primo ordine: $y'(x) = f(x, y(x))$
   - Forma standard del secondo ordine: $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$
2. Verificare che l'equazione differenziale soddisfi le condizioni di esistenza e unicità della soluzione.
3. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale.

4. Applicare la condizione iniziale specificata per trovare la soluzione particolare del problema di Cauchy.

Prendiamo come esempio l'equazione differenziale $y'(x) = x^2 + y(x)$, con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

1. L'equazione differenziale è già nella forma standard del primo ordine.
2. L'equazione differenziale soddisfa le condizioni di esistenza e unicità della soluzione.
3. Troviamo la soluzione generale dell'equazione differenziale. Per farlo, separiamo le variabili:

   $dy/dx = x^2 + y(x)$

   $dy - y(x)dx = x^2dx$

   Integrando entrambi i membri, otteniamo:

   $y(x) - (1/3) * y(x)^3 = (1/3) * x^3 + C$

   dove C è una costante di integrazione.

4. Applichiamo la condizione iniziale per trovare la soluzione particolare del problema di Cauchy. Sostituendo x = 0 e y = 1, abbiamo:

   $1 - (1/3) * 1^3 = (1/3) * 0^3 + C$

   $C = 2/3$

   Quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da:

   $y(x) - (1/3) * y(x)^3 = (1/3) * x^3 + 2/3$, con $y(0) = 1$.